EXERCICES SUR LA DÉRIVATION

Dérivées des fonctions de référence

Domaine de définition de f	Fonction f	Domaine sur lequel f est dérivable	Dérivée f'
$\mathbb{R}$	c (une constante)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
$\mathbb{R}$	$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	x^n (avec $n>0$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	x^n (avec $n<0$)	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	nx^{n-1}
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x

Dérivation et Opérations

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et dont les dérivées sont u' et v'

Opérations	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$k\times u$ (avec k une constante)	$k\times u'$
Si v ne s'annule pas sur I : $\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Si v ne s'annule pas sur I : $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$u\left(ax+b\right)$	$a\times u'\left(ax+b\right)$
e^{ax+b}	$a\times \mathrm{e}^{ax+b}$

Exercices de calcul de dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable puis calculer $f'\left(x\right)$

Niveau Facile

1. $f\left(x\right)=5x^2-3x+2+\mathrm{e}^{3x+200}$ définie sur $\mathbb{R}$
2. $f\left(x\right)=100+\dfrac{2}{x}+\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
3. $f\left(x\right)=3x^3\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$
4. $f\left(x\right)=\dfrac{12-5x}{x+2}$ définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$
5. $f\left(x\right)=\left(3x-5\right)^3$ définie sur $\mathbb{R}$
6. $f\left(x\right)=\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$
7. $f\left(x\right)=\left(1-2x\right)\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$

Niveau Moyen

1. $f\left(x\right)=-1,2x^4+7x^3-x$ définie sur $\mathbb{R}$
2. $f(x)=\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{9}x^3+\frac{11}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$
3. $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4\left(4-x^2\right)$ définie sur $\mathbb{R}$
4. $f\left(x\right)=\dfrac{-24}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$
5. $f\left(x\right)=\left(x^2+3x-5\right)\mathrm{e}^{2x-1}$ définie sur $\mathbb{R}$
6. $f\left(x\right)=5x^{-7}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
7. $f\left(x\right)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{1-x}$ définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Corrigé des Exercices sur la Dérivation

Exercices niveau facile

1. f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
Pour dériver chaque terme de la somme, on peut remarquer que :
$x \mapsto 5x^2$ est de la forme ku avec $k=5$ et $u(x)=x^2$. Donc la dérivée est : $k \times u'(x) = 5 \times 2x = 10x$
$x \mapsto -3x+2$ est de la forme $ax+b$ avec $a=-3$ et $b=2$. Donc la dérivée est : $a=-3$
$x \mapsto \mathrm{e}^{3x+200}$ est de la forme e^{ax+b} avec $a=2$ et $b=200$. Donc la dérivée est : $a\mathrm{e}^{ax+b} = 3\mathrm{e}^{3x+200}$
Finalement, pour tout réel x : $f'(x) = 10x - 3 + 3\mathrm{e}^{3x+200}$

2. f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
f est donc dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
Pour dériver chaque terme de la somme, on peut remarquer que :
$x \mapsto 100$ est une constante, donc la dérivée est : 0
$x \mapsto \dfrac{2}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x}$ est de la forme ku avec $k=2$ et $u(x)=\dfrac{1}{x}$. La dérivée est : $k \times u'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^2}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de la forme e^{ax+b} avec $a=-1$ et $b=0$. La dérivée est : $a\mathrm{e}^{ax+b} = (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$
Finalement, pour tout réel $x \neq 0$: $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} - \mathrm{e}^{-x}$

3. f est de la forme $u \times v$, avec :
— $u(x) = 3x^3$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3 \times 3x^2 = 9x^2$
— $v(x) = \sqrt{x}$. v est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. On sait que $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
On en déduit que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Finalement, pour tout réel $x>0$: $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = 9x^2\sqrt{x} + 3x^3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 9x^2\sqrt{x} + \dfrac{3x^3}{2\sqrt{x}}$

4. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec :
— $u(x) = 12-5x$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -5$
— $v(x) = x+2$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que $v'(x) = 1$
On en déduit que f est définie et dérivable sur le domaine où v ne s'annule pas, soit : $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$
Finalement, pour tout réel $x \neq -2$: $f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}(x) = \dfrac{-5(x+2) - 1 \times (12-5x)}{(x+2)^2}$
D'où : $f'(x) = \dfrac{-5x-10-12+5x}{(x+2)^2} = \dfrac{-22}{(x+2)^2} = -\dfrac{22}{(x+2)^2}$

5. $f(x)$ est de la forme $u(ax+b)$ avec $a=3$, $b=-5$ et $u(x)=x^3$. On sait que $u'(x) = 3x^2$
Vu que u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi.
Pour tout réel x : $f'(x) = a \times u'(ax+b) = 3 \times 3(3x-5)^2 = 9(3x-5)^2$

6. f est de la forme $u \times v$, avec :
— $u(x) = x^2-1$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$
— $v(x) = \mathrm{e}^x$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que $v'(x) = \mathrm{e}^x$
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Finalement, pour tout réel x :
$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = 2x\mathrm{e}^x + \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(2x+x^2-1\right) = \mathrm{e}^x\left(x^2+2x-1\right)$

7. f est de la forme $u \times v$, avec :
— $u(x) = 1-2x$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -2$
— $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On trouve que $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ (voir question 2)
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Finalement, pour tout réel x :
$f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + (1-2x) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}(-2-1+2x) = \mathrm{e}^{-x}(2x-3)$

Exercices niveau moyen :

1. f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
   Pour tout réel x : $f'(x) = -1,2 \times 4x^3 + 7 \times 3x^2 - 1 = -4,8x^3 + 21x^2 - 1$

2. f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
   Pour tout réel x : $f'(x) = \frac{3}{\cancel{5}} \times \cancel{5}x^4 - \frac{1}{9} \times 3x^2 + 0 = 3x^4 - \frac{1}{3}x^2$

3. Si on développe l'expression de $f(x)$, on va trouver une somme, ce qui est plus facile à dériver qu'un produit.
   $f(x) = \frac{1}{\cancel{4}}x^4 \times \cancel{4} + \frac{1}{4}x^4 \times x^2 = x^4 - \frac{1}{4}x^6$
   f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
   Pour tout réel x : $f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{4} \times 6x^5 = 4x^3 - \frac{3}{2}x^5 = x^3\left(4 - \frac{3}{2}x^2\right)$

4. $f(x) = \dfrac{-24}{x^2+1} = -24 \times \dfrac{1}{x^2+1}$ est de la forme ku. De plus u est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 1$ et $v'(x) = 2x$
   Sachant que : $\left.\begin{array}{ccc} x^2 & \geq & 0 \\ 1 & > 0 & \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 1 > 0$, cela prouve que $v$ne s'annule jamais. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x :$f'(x) = k \times u'(x) = -24 \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}(x)\right) = 24 \times \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{48x}{\left(x^2+1\right)^2}$

5. f est de la forme $u \times v$, avec :
   — $u(x) = x^2 + 3x - 5$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 3$
   — $v(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On trouve que $v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1}$ (voir question 2)
   On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Finalement, pour tout réel x :
   $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{2x-1} + \left(x^2 + 3x - 5\right) \times 2\mathrm{e}^{2x-1}$
   $f'(x) = \mathrm{e}^{2x-1}\left(2x + 3 + 2x^2 + 6x - 10\right) = \mathrm{e}^{2x-1}\left(2x^2 + 8x - 7\right)$

6. f est de la forme ku avec $u(x) = x^{-7}$. On sait que u est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, donc f l'est aussi.
   Notons que $u(x)$ est de la forme x^n avec $n = -7$, donc $u'(x) = nx^{n-1} = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$
   Pour tout réel x non nul : $f'(x) = ku'(x) = 5 \times -7x^{-8} = -35x^{-8} = -\dfrac{35}{x^8}$

7. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec :
   — $u(x) = x\mathrm{e}^x$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables : $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$
   $u'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$
   — $v(x) = 1 - x$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que $v'(x) = -1$
   On en déduit que f est définie et dérivable sur le domaine où v ne s'annule pas, soit : $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
   Finalement, pour tout réel $x \neq 1$: $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(x) = \dfrac{(1+x)\mathrm{e}^x \times (1-x) - x\mathrm{e}^x \times (-1)}{(1-x)^2}$
   D'où : $f'(x) = \dfrac{((1+x)(1-x) + x)\mathrm{e}^x}{(1-x)^2} = \dfrac{\left(1 - x^2 + x\right)\mathrm{e}^x}{(1-x)^2}$