ALGEBRE

Exercice 1 :

1) a) Résoudre l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$

$a = 1, b = -7, c = 10$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$

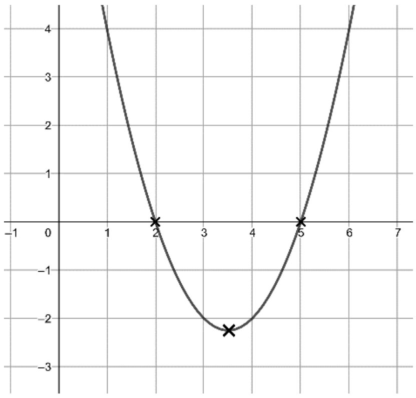
$x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\times1} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\times1} = 5$

Les solutions de l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$ sont $\{\mathbf{2}; \mathbf{5}\}$.

b) Etablir le tableau de signes de $x^2 - 7x + 10$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
Signe de $x^2 - 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de $f(x) = x^2 + 7x - 10$, puis tracer cette parabole dans un repère orthonormé.



Le sommet de la parabole a pour abscisse : $\frac{-(-7)}{2\times1} = \mathbf{3,5}$

et pour ordonnée : $f(3{,}5) = 3{,}5^2 - 7 \times 3{,}5 + 10 = \mathbf{-2,25}$

2) a) Résoudre l'équation $6x^2 + x + 1 = 0$

$a = 6, b = 1, c = 1$

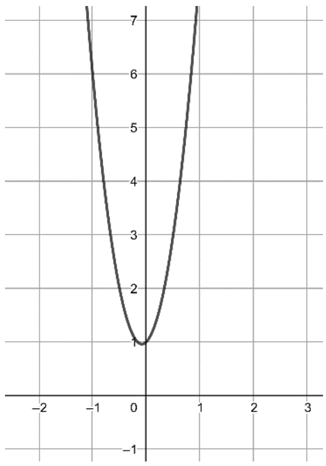
$\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times 1 = -23$

$\Delta < 0$ donc l'équation $6x^2 + x + 1 = 0$ **n'a pas de solution.**

b) Etablir le tableau de signes de $6x^2 + x + 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $6x^2 + x + 1$		$+$	

c) Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de $g(x) = 6x^2 + x + 1$, puis tracer cette parabole dans un repère orthonormé.



Le sommet de la parabole a pour abscisse : $\frac{-1}{2\times6} = \mathbf{\frac{-1}{12}}$

et pour ordonnée : $f\left(\frac{-1}{12}\right) = 6 \times \left(\frac{-1}{12}\right)^2 + \frac{-1}{12} + 1 = \mathbf{\frac{23}{24}}$

3) a) Résoudre l'équation $-3x^2 + 24x - 48 = 0$

$a = -3, b = 24, c = -48$

$\Delta = 24^2 - 4 \times (-3) \times (-48) = 0$

Une solution : $x_0 = \frac{-24}{2\times(-3)} = 4$

La solution de l'équation $-3x^2 + 24x - 48 = 0$ est $\{\mathbf{4}\}$.

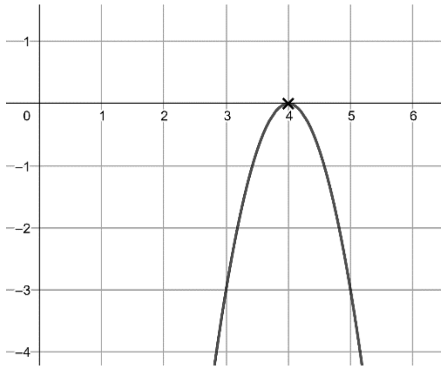
b) Etablir le tableau de signes de $-3x^2 + 24x - 48$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $-3x^2 + 24x - 48$		$-$	0	$-$	

c) Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentative de $h(x) = -3x^2 + 24x - 48$, puis tracer cette parabole dans un repère orthonormé.

Le sommet de la parabole a pour abscisse : $\frac{-24}{2\times(-3)} = \mathbf{4}$

et pour ordonnée : $f(4) = -3 \times 4^2 + 24 \times 4 - 48 = \mathbf{0}$



Exercice 2 :

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2 000 unités seront produites puis la production augmentera chaque semaine de 10 %.

On désigne par u_n, le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine. On arrondira les résultats à l'unité.

1) Donner u_1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

$u_1 = 2\,000$

$u_2 = 2\,000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2\,000 \times 1{,}10 = 2\,200$

$u_3 = 2\,200 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2\,200 \times 1{,}10 = 2\,420$

$u_4 = 2\,420 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2\,420 \times 1{,}10 = 2\,662$

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? $u_{n+1} = u_n \times 1{,}10$ La suite est géométrique de raison 1,10.

3) Exprimer u_n en fonction de n : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2\,000 \times 1{,}10^{n-1}$

4) Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.

$u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = 2\,000 + 2\,000 \times 1{,}10 + \dots + 2\,000 \times 1{,}10^{19}$

$= 2\,000 \times (1 + 1{,}10 + \dots + 1{,}10^{19}) = 2\,000 \times \frac{1 - 1{,}10^{20}}{1 - 1{,}10} = 114\,549{,}999 \approx 114\,550$

ANALYSE

Exercice 3 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (4x^2 - 5x + 7)(3x^2 + 8x - 2)$

f est de la forme $u \times v$ avec :

$u(x) = (4x^2 - 5x + 7)$; $u'(x) = 4 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = (8x - 5)$

$v(x) = (3x^2 + 8x - 2)$; $v'(x) = 3 \times 2x + 8 \times 1 - 0 = (6x + 8)$

$f' = u' \times v + u \times v'$

$f'(x) = (8x - 5) \times (3x^2 + 8x - 2) + (4x^2 - 5x + 7) \times (6x + 8)$

$f'(x) = 24x^3 + 64x^2 - 16x - 15x^2 - 40x + 10 + 24x^3 + 32x^2 - 30x^2 - 40x + 42x + 56$

$f'(x) = 48x^3 + 51x^2 - 54x + 66$

2) $g(x) = \frac{4x+5}{-3x+6}$

g est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$u(x) = (4x + 5)$; $u'(x) = 4 \times 1 + 0 = 4$

$v(x) = (-3x + 6)$; $v'(x) = -3 \times 1 + 0 = -3$

$g' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

$g'(x) = \frac{4 \times (-3x + 6) - (-3) \times (4x + 5)}{(-3x + 6)^2} = \frac{-12x + 24 + 12x + 15}{(-3x + 6)^2} = \frac{39}{(-3x + 6)^2}$

Exercice 4 :

On considère la fonction définie par $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 10$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est de la forme :

$$y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$$

Avec $f'(x) = 5 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = 15x^2 - 8x + 3$

$f'(2) = 15 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = 47$

Et $f(2) = 5 \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 10 = 40$

Donc $y = 47 \times (x-2) + 40 = 47x - 94 + 40$

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est : $y = 47x - 54$

Exercice 5 :

On souhaite étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)e^x$

1) Calculer la dérivée de f.

   f est de la forme $u \times v$ avec :

$u(x) = (x-3)$; $u'(x) = 1 - 0 = 1$

$v(x) = e^x$; $v'(x) = e^x$

$f' = u' \times v + u \times v'$

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-3) \times e^x = (1 + x - 3) \times e^x = (x-2) \times e^x$

2) a) Etude du signe de f' :

   $x - 2 > 0$ pour $x > 2$

   e^x est toujours positive.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $(x-2)$	$-$		$+$
Signe de e^x	$+$		$+$
Signe de la dérivée f'	$-$		$+$

b) Construire le tableau de variation de f.

(vérifier votre tableau de variation en traçant la courbe représentative de f sur la calculatrice).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de la dérivée f'	$-$		$+$
Variations de f	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$

$f(2) = (2-3)e^2 = -e^2 \approx -7{,}39$

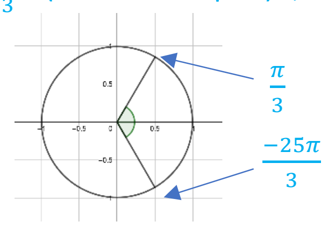
3) Déterminer le minimum de f : le minimum de f est $-e^2 \approx -7{,}39$

Exercice 6 : Ecrire les expressions suivantes sous la forme e^A, où A est une expression.

1) $e^{3x} \times e^{5-x} = e^{3x+5-x} = e^{2x+5}$
2) $\frac{e^{2x-3}}{e^{x-1}} = e^{2x-3-(x-1)} = e^{2x-3-x+1} = e^{x-2}$
3) $(e^{x+2})^2 \times (e^{-x+1})^3 = e^{2(x+2)} \times e^{3(-x+1)} = e^{2x+4} \times e^{-3x+3} = e^{2x+4-3x+3} = e^{-x+7}$

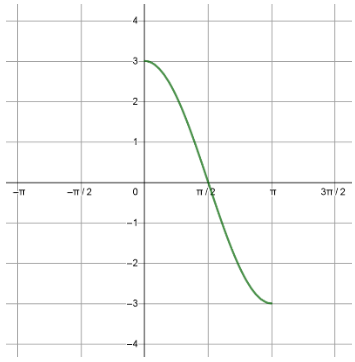
Exercice 7 : En utilisant les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminer les valeurs du cosinus et sinus de $\frac{-25\pi}{3}$

$2\pi = \frac{6\pi}{3}$ (un tour complet) ; $\frac{-25\pi}{3} = \frac{-24\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -4 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}$

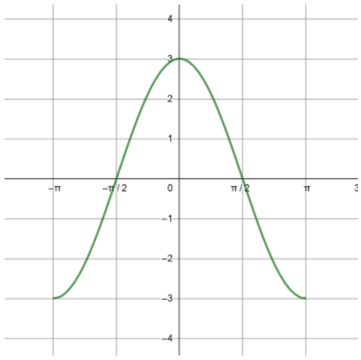


Conclusion : $\cos\left(\frac{-25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{-25\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

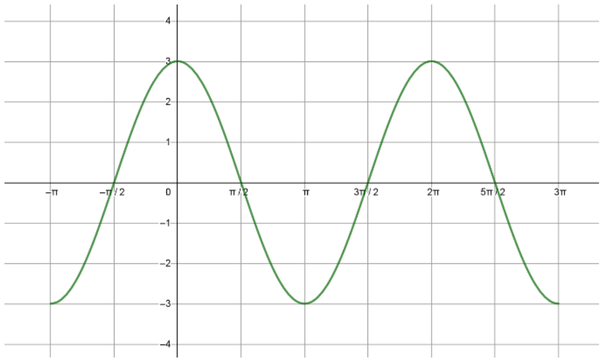
Exercice 8 :
On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(x)$.
On a tracé ci-contre sa représentation graphique C_f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.



1) Reproduire la courbe.
2) Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de C_f.
   $f(-x) = 3\cos(-x) = 3\cos(x) = f(x)$
   donc f est paire, et C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   Compléter alors C_f sur $[-\pi; 0]$.



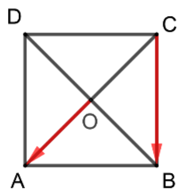
3) Calculer $f(x + 2\pi)$ et en déduire une propriété graphique de C_f.
   $f(x + 2\pi) = 3\cos(x + 2\pi) = 3\cos(x) = f(x)$
   donc f est périodique de période 2π , et C_f est identique sur des intervalles de longueur 2π.
   Compléter alors C_f sur $[\pi; 3\pi]$.



GEOMETRIE

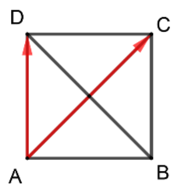
Exercice 9 : ABCD est un carré de centre O et de côté 2. Le point I est le milieu du segment [AD].

1) En utilisant la définition avec le cosinus, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB}$



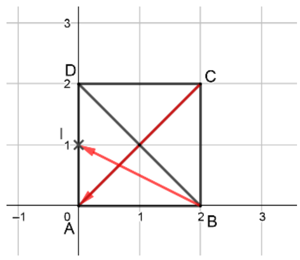
   $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB} = OA \times CB \times \cos\left(\widehat{ACB}\right)$
   Calcul de OA : c'est la moitié de la diagonale [CA], on applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC : $CA^2 = CB^2 + BA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$
   donc $CA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $OA = \sqrt{2}$
   Conclusion : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB} = \sqrt{2} \times 2 \times \cos(45°) = 2$

2) En utilisant un projeté orthogonal, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$



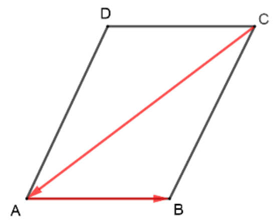
   D est le projeté orthogonal de C sur [AD].
   $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = AD \times AD = 2 \times 2 = 4$

3) En introduisant un repère et en calculant les coordonnées des vecteurs, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CA}$



   Dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$: le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $(-2; 1)$
   et le vecteur $\overrightarrow{CA}$ a pour coordonnées $(-2; -2)$.
   $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CA} = -2 \times (-2) + 1 \times (-2) = 2$

Exercice 10 : ABCD est un parallélogramme tel que AB = 3, AD = 4 et AC = 6.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$



On souhaite appliquer une des deux formules des normes, est-ce que l'on connait la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ ou celle du vecteur $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$?

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}$ avec AD = 4

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et on ne connait pas la norme de ce vecteur.

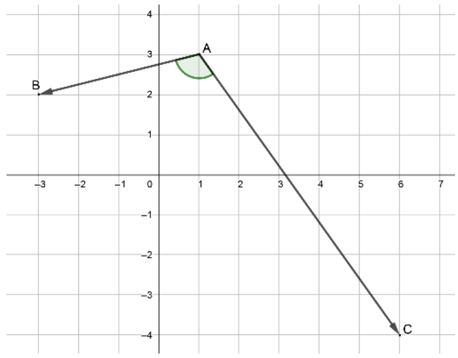
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}(4^2-3^2-6^2)=-14{,}5$

Exercice 11 :
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1\,;\,3), B(-3\,;2)$ et $C(6\,;-\,4)$.

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

   $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;\,-7)$

   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-4\times5+(-1)\times(-7)=-13$



2) En déduire une valeur approchée, au degré près, de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

   Avec $AB=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

   et $AC=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{74}$

   donc $-13=\sqrt{17}\times\sqrt{74}\times\cos(\widehat{BAC})$

   $\cos(\widehat{BAC})=\frac{-13}{\sqrt{17}\times\sqrt{74}}$ d'où $\widehat{BAC}\approx111{,}501\ldots\approx112°$

Exercice 12 :
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère l'équation de cercle suivante :

$$x^2+y^2-2x+8y+8=0$$

Déterminer les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.

On regroupe les termes en x ensembles, et les termes en y ensembles, puis il faut reconnaître le début de développements d'identités remarquables :

x^2-2x est le début du développement de $(x-1)^2=x^2-2\times x\times1+1^2=x^2-2x+1$

donc $x^2-2x=(x-1)^2-1$

y^2+8y est le début du développement de $(y+4)^2=y^2+2\times y\times4+4^2=y^2+8y+16$

donc $y^2+8y=(y+4)^2-16$

On remplace ces deux nouvelles expressions dans l'équation de l'énoncé :

$(x-1)^2-1+(y+4)^2-16+8=0$

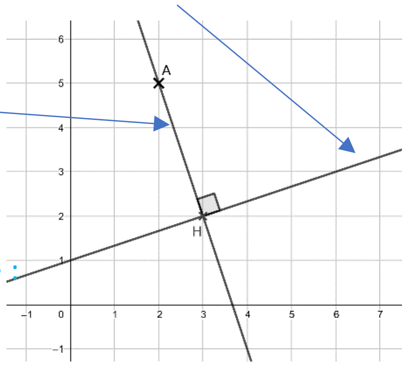
$(x-1)^2+(y+4)^2-9=0$

$(x-1)^2+(y+4)^2=9$

C'est l'équation du cercle de centre le point de coordonnées (1 ; - 4) et de rayon $\sqrt{9}=3$.

Exercice 13 :
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $x-3y+3=0$ et le point A de coordonnées (2 ; 5). H est le projeté orthogonal de A sur la droite d.

1) Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à la droite d passant par A.



La droite d_1 est perpendiculaire à la droite d, donc le vecteur de coordonnées $(1\,;-3)$ qui est un vecteur normal de d, est un vecteur directeur de d_1.

Donc la droite d_1 a une équation de la forme : $-3x-1y+c=0$

Comme A appartient à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

$-3\times2-1\times5+c=0$ ce qui donne : $-6-5+c=0$ et donc $c=11$

Conclusion : la droite d_1 a une équation de la forme : $-3x-y+11=0$

2) Calculer les coordonnées de H.

Le point H est le point d'intersection entre les droites d_1 et d ; ses coordonnées vérifient en même temps les équations de d et d_1:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ -3x - y + 11 = 0 \end{cases}$$

De la première équation on obtient une expression de x en fonction de y : $x = 3y - 3$

On reporte cette expression dans la deuxième équation :

$-3 \times (3y - 3) - y + 11 = 0$

$-9y + 9 - y + 11 = 0$

$-10y + 20 = 0$

$-10y = -20$ d'où $y = \frac{-20}{-10} = 2$

On reporte cette valeur dans une des équations de droites (par exemple d_1) :

$-3x - 2 + 11 = 0$ d'où $-3x + 9 = 0$ d'où $-3x = -9$ et donc $x = \frac{-9}{-3} = 3$

Conclusion : les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur d sont $(3 ; 2)$.

PROBABILTES ET STATISTIQUES

Exercice 14 : On demande à un échantillon de clients d'un fournisseur de téléphonie si, en cas de problème, ils préfèrent contacter le service après-vente (SAV) par téléphone ou s'ils préfèrent se rendre directement en boutique.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-contre.

On choisit, au hasard, un client de l'échantillon.

	+ 18 ans	−18 ans	Total
En boutique	110	36	146
Par téléphone	40	64	104
Total	150	100	250

1) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

   A « le client est un adulte de 18 ans ou plus » $P(A) = \frac{150}{250} = 0{,}6$

   et B « le client préfère se rendre en boutique » $P(B) = \frac{146}{250} = 0{,}584$

2) Sachant que le client choisi préfère se rendre en boutique, quelle est la probabilité que ce client soit un adulte ? $P_B(A) = \frac{110}{146} \approx 0{,}75$

3) Le client choisi est un adolescent de moins de 18 ans, calculer la probabilité qu'il préfère contacter le SAV par téléphone ? $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{64}{100} = 0{,}64$

Exercice 15 :

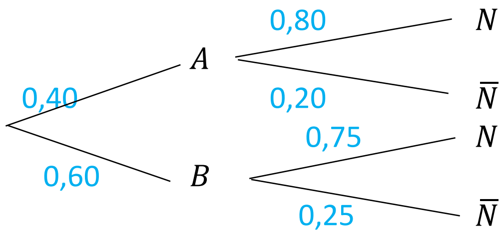
Une centrale d'achat se procure 40 % de ses vêtements chez un fournisseur A et le reste chez un fournisseur B. Certains des vêtements sont vendus à un prix normal et le reste, présentant des défauts, et vendu à un prix réduit. 80 % des vêtements provenant du fournisseur A ne présentent pas de défaut, tandis que 25 % des vêtements provenant du fournisseur B présentent des défauts.

On considère les évènements suivants :

- A : « le vêtement provient du fournisseur A » ;
- B : « le vêtement provient du fournisseur B » ;
- N : « le vêtement est vendu à un prix normal ».

On choisit au hasard un vêtement dans les entrepôts de la centrale d'achat.

1) Compléter l'arbre ci-dessous, qui modélise cette situation, en rajoutant les probabilités sur les branches.



2) Calculer la probabilité de choisir un vêtement provenant du fournisseur B et vendu à un prix normal :
$P(B \cap N) = 0{,}60 \times 0{,}75 = 0{,}45$

Exercice 16 :

On lance un dé équilibré à six faces, et on définit deux règles :

- Règle n°1 : si la face supérieure du dé est 1 ou 2, le joueur gagne 13 €, sinon il perd 6 €.
- Règle n°2 : si la face supérieure du dé est 6, le joueur gagne 100 €, sinon il perd 20 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur avec la règle n°1, et Y celle qui, à chaque partie, associe le gain du joueur avec la règle n°2.

1) Déterminer les lois de probabilités de X et Y.

Loi de probabilités de X :

Valeurs de X	13	-6
Probabilités	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

Loi de probabilités de Y :

Valeurs de Y	100	-20
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

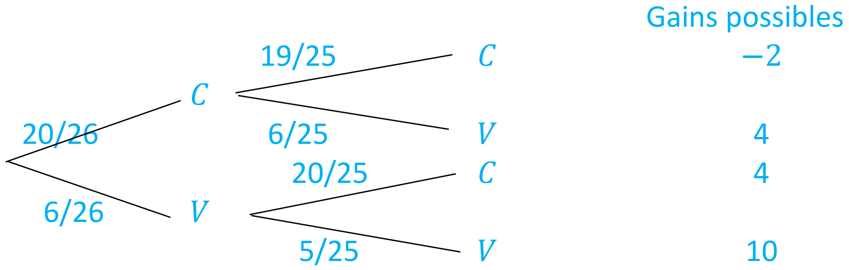
1) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
$E(X) = 13 \times \frac{2}{6} - 6 \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ et $E(Y) = 100 \times \frac{1}{6} - 20 \times \frac{5}{6} = 0$

2) Kévin envisage de jouer un très grand nombre de fois. Quelle règle peut-on lui conseiller de choisir ?
On peut lui conseiller de choisir la 1ère règle car l'espérance de gain est positive.

Exercice 17 :

Un sac contient 26 jetons marqués chacun avec une des 26 lettres de l'alphabet. On tire un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier jeton dans le sac.
On gagne 5 € par voyelle tirée, et on perd 1 € par consonne tirée.
On considère les évènements suivants :
C : « sur le jeton tiré est écrit une consonne ».
V : « sur le jeton tiré est écrit une voyelle ».

1) Construire un arbre pondéré illustrant cette expérience.
Il y a 6 voyelles (A, E, I, O, U, Y) et 20 consonnes.



Lors du 2nd tirage, la composition du sac a changé et dépend du 1er tirage :
- si le 1er jeton tiré est une consonne, alors il reste 19 consonnes et 6 voyelles (et donc un total de 25 jetons) ;
- si le 1er jeton tiré est une voyelle, alors il reste 20 consonnes et 5 voyelles (et encore un total de 25 jetons).

2) Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique du joueur ? $-2;\ 4$ et 10.
3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le gain algébrique du joueur.

Loi de probabilités :

Valeurs	-2	4	10
Probabilités	$\frac{38}{65}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{3}{65}$

$$\frac{20}{26} \times \frac{19}{25} = \frac{380}{650} = \frac{38}{65} \approx 0{,}58$$

$$\frac{20}{26} \times \frac{6}{25} + \frac{6}{26} \times \frac{20}{25} = \frac{240}{650} = \frac{24}{65} \approx 0{,}37$$

$$\frac{6}{26} \times \frac{5}{25} = \frac{30}{650} = \frac{3}{65} \approx 0{,}05$$