

EXERCICES SUR LES SUITES

Formulaire sur les suites arithmétiques et géométriques

	(u_n) une suite arithmétique de raison r	(u_n) une suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Expression du terme général	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n - p)r$ où $p \leq n$	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ où $p \leq n$
Sommes particulières	$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Sommes	$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ nb de termes \times (1 ^{er} + dernier terme) $\frac{\quad}{2}$	$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ 1 ^{er} terme \times $\frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$

Monotonie d'une suite

- (u_n) une suite est croissante si pour tout entier naturel $n : u_n \leq u_{n+1}$
- (u_n) une suite est décroissante si pour tout entier naturel $n : u_n \geq u_{n+1}$
- (u_n) une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante

Méthodes pour étudier la monotonie d'une suite

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
 - a. Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n alors (u_n) est une suite croissante.
 - b. Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout entier naturel n alors (u_n) est une suite décroissante.
 - c. Si $u_{n+1} - u_n$ change de signe alors (u_n) n'est pas une suite monotone.
2. Si pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$, alors on peut calculer $f'(x)$ et étudier son signe puis les variations de f sur $[0; +\infty[$.
 - a. Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est une suite croissante.
 - b. Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est une suite décroissante.
 - c. Si f change de variations sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) n'est pas une suite monotone.

Exercice sur la notation d'une suite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 1$
Exprimer en fonction de n : u_{n+1} , u_{n-1} , u_{2n} , $u_n + 1$, $u_n - 1$
2. Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$
Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de n

Exercice sur le calcul des termes d'une suite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - 1$
Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_1 = -3$
Calculer sans calculatrice u_{101}
3. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $u_0 = 1$
Calculer sans calculatrice les quatre premiers termes de la suite, puis u_{20}
4. Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$
Donner la valeur exacte de u_1 et u_2 . Avec la calculatrice, donnez la valeur de u_{10}
5. Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 & \text{et} & u_1 = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, & u_{n+2} = u_n \times u_{n+1} \end{cases}$$
Donner la valeur exacte de u_2 , u_3 et u_4 .

Exercice sur les suites arithmétiques

1. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques? Justifier
 - a. (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$
 - b. (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n + 3$
 - c. (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = (n + 1)^2 - n^2$
2. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = -1$
Déterminer la raison et le premier terme u_0 de la suite.

Exercice sur les suites géométriques

- Les suites suivantes sont-elles géométriques? Justifier
 - (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$$
 - (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{4^{n+1}}$
 - (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{1}{n+1}$
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = 1$. Déterminer la raison et le premier terme u_0 de la suite.
- (u_n) est la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$$
 (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 2$
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
 - Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice sur les sommes

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_1 = 4$. Calculer la somme des 30 premiers termes de la suite (u_n) .
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -9$. Calculer la somme $u_2 + u_3 + \dots + u_{15}$.
- Calculer les sommes suivantes :
 - $S = 10 + 11 + 12 \dots + 75$
 - $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$
 - $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{20}$
 - $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 1024 - 2048$

Exercice sur les suites monotones

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la suite (u_n)

- $u_n = n^2 + 2n$
- $u_n = -5^n$
- $u_n = \frac{4}{n+1}$
- (u_n) est la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 + 5 \end{cases}$$
- (u_n) est la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

CORRIGÉ DES EXERCICES SUR LES SUITES

Exercice sur la notation d'une suite

- $u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 1 + 1 = n^2 + 2n + 2$
 $u_{n-1} = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 1 + 1 = n^2 - 2n + 2$
 $u_{2n} = (2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1$
 $u_n + 1 = n^2 + 1 + 1 = n^2 + 2$
 $u_n - 1 = n^2 + 1 - 1 = n^2$
- $u_{n+2} = u_{n+1} + n + 1$

Exercice sur le calcul des termes d'une suite

- Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - 1$
 $u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$; $u_1 = 2^1 - 1 = 1$; $u_2 = 2^2 - 1 = 3$; $u_3 = 2^3 - 1 = 7$; $u_4 = 2^4 - 1 = 15$
- Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_1 = -3$
On sait que $u_{101} = u_1 + 100 \times r = -3 + 100 \times 2 = 197$
- Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $u_0 = 1$
On sait que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (-3)^n = (-3)^n$
D'où : $u_1 = (-3)^1 = -3$; $u_2 = (-3)^2 = 9$; $u_3 = (-3)^3 = -27$, puis $u_{20} = (-3)^{20} = 3486784401$
- Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$
 $u_1 = 3u_0 + 2 = 3 \times \frac{2}{3} + 2 = 2 + 2 = 4$ et $u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \times 4 + 2 = 14$.
Avec la calculatrice, $u_{10} = 98414$
Pour ceux qui disposent d'une Numwork et qui ont besoin d'un petit rappel, dans le lien ci-dessous vous pouvez consulter la vidéo « Obtenir le tableau de valeurs d'une suite récurrente d'ordre 1 »
<https://www.numworks.com/fr/professeurs/tutoriels/suites/>
- Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 & \text{et} & u_1 = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n \times u_{n+1} \end{cases}$
 $u_2 = u_0 \times u_1 = 2 \times (-1) = -2$, $u_3 = u_1 \times u_2 = (-1) \times (-2) = 2$ et $u_4 = u_2 \times u_3 = 2 \times (-2) = -4$.

Exercice sur les suites arithmétiques

- Les suites suivantes sont-elles arithmétiques? Justifier
 - (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
On calcule $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ et $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$
On remarque que $u_1 = u_0 + 4$ tandis que $u_2 = u_1 + 8$.
Cela contredit la définition d'une suite arithmétique et prouve donc que (u_n) n'est pas arithmétique.
 - (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n + 3$
 (v_n) est arithmétique car le terme général est de la forme $v_n = v_0 + nr$ avec $v_0 = 3$ et $r = -1$

c. (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = (n+1)^2 - n^2$

$$w_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1+n)(n+1-n) = 2n+1$$

En posant $r = 2$ et $w_0 = 1$, on reconnaît la formule du terme général d'une suite arithmétique. Donc (w_n) est arithmétique

2. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = -1$

On sait que, si (u_n) est arithmétique de raison r , alors :

$$u_6 = u_2 + 4 \times r \Leftrightarrow -1 = 4 + 4r \Leftrightarrow -5 = 4r \Leftrightarrow -\frac{5}{4} = r$$

$$\text{De plus on sait que } u_2 = u_0 + 2r \Leftrightarrow u_2 - 2r = u_0 \Leftrightarrow 4 - 2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) = u_0 \Leftrightarrow 4 + \frac{5}{2} = u_0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{13}{2}$$

Exercice sur les suites géométriques

1. Les suites suivantes sont-elles géométriques? Justifier

a. (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$

On remarque que $u_{n+1} = \frac{1}{2} \times u_n$, ce qui prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b. (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{4^{n+1}}$

— Méthode 1 : Calculons : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{4^{n+1+1}}}{\frac{1}{4^{n+1}}} = \frac{1}{4^{n+1} \times 4^1} \times \frac{4^{n+1}}{1} = \frac{1}{4}$

Cela prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

— Méthode 2 : $v_n = \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4^n \times 4} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

On reconnaît la formule terme général d'une suite géométrique en posant $v_0 = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{1}{4}$

c. (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{1}{n+1}$

On calcule : $w_0 = \frac{1}{0+1} = 1$, $w_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $w_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

On remarque que $w_1 = \frac{1}{2}w_0$ tandis que $w_2 = \frac{2}{3}w_1$

Cela prouve que (w_n) n'est pas une suite géométrique.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = 1$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors :

$$u_6 = u_2 \times q^4 \Leftrightarrow q^4 = \frac{u_6}{u_2} \Leftrightarrow (q^2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

car $q > 0$. De plus on sait que :

$$u_2 = u_0 \times q^2 \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_2}{q^2} \Leftrightarrow u_0 = \frac{4}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow u_0 = 2 \times 4 = 8$$

3. (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$

(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 2$

a. Montrons que pour tout entier naturel n $v_{n+1} = 3v_n$. Pour cela, remarquons que $u_n = v_n - 2$ et calculons :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 3u_n + 4 + 2 = 3(v_n - 2) + 6 = 3v_n - 6 + 6 = 3v_n$$

Cela prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison 3

b. Calculons $v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$. On sait alors que $v_n = v_0 q^n = 4 \times 3^n$

c. Pour tout entier naturel n , $u_n = v_n - 2 = 4 \times 3^n - 2$

Exercice sur les sommes

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_1 = 4$

On demande de calculer $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$

On a besoin de calculer d'abord $u_{30} = u_1 + 29 \times r = 4 + 29 \times (-3) = -83$

Appliquons à présent la formule :

$$S_{30} = \frac{\text{nb de termes} \times (\text{1}^{\text{er}} + \text{dernier terme})}{2} = \frac{1}{2} \times 30 \times (4 - 83) = -1185$$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -9$

Calculons d'abord : $u_2 = u_0 \times q^2 = -9 \times 2^2 = -36$

Appliquons la formule :

$$u_2 + u_3 + \dots + u_{15} = \text{1}^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = u_2 \times \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} = -36 \times (2^{14} - 1) = 589788$$

3. Calculer les sommes suivantes :

- a. $S = 10 + 11 + 12 \dots + 75$. S peut être considérée comme la somme S_1 des entiers naturels de 1 à 75 à laquelle on soustrait la somme S_2 des entiers naturels de 1 à 9 ; S_1 et S_2 peuvent se calculer grâce à la

formule : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{D'où : } S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \times 75 \times (75 + 1) - \frac{1}{2} \times 9 \times (9 + 1) = 2805$$

- b. $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 101$. S peut être considérée comme la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 . Entre le premier et le dernier terme on ajoute 50 fois la raison, ce qui implique qu'il y a 51 termes.

$$\text{D'où : } S = \frac{\text{nb de termes} \times (\text{1}^{\text{er}} + \text{dernier terme})}{2} = \frac{1}{2} \times 51 \times (1 + 101) = 2601$$

- c. $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{20}$.

On peut appliquer la formule $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ avec $q = 3$ et $n = 20$

$$S = \frac{1 - 3^{20+1}}{1 - 3} = \frac{1 - 3^{21}}{-2} = \frac{1}{2} (3^{21} - 1) = 5230176601$$

- d. $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 1024 - 2048$. S peut être considérée comme la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 1$. En tâtonnant on cherche n tel que $(-2)^n = -2048$ et on trouve $n = 11$. De là :

$$S = 1 + (-2) + (-2)^2 + \dots + (-2)^{11} = \frac{1 - (-2)^{11+1}}{1 - (-2)} = \frac{1 - 2^{12}}{3} = -1365$$

Exercice sur les suites monotones

1. $u_n = n^2 + 2n$. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $f(x) = x^2 + 2x$ de sorte que $u_n = f(n)$

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 2x + 2$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow \frac{2x}{2} \geq \frac{0}{2} \\ \phantom{\frac{2x}{2}} > \phantom{\frac{0}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Cela prouve que f est croissante sur $[0; +\infty[$ et donc que (u_n) est croissante

2. $u_n = -5^n$

Pour tout entier naturel n , on calcule : $u_{n+1} - u_n = -5^{n+1} - (-5^n) = -5^n \times 5 + 5^n = 5^n(-5 + 1) = -4 \times 5^n$

Il est clair que : $-4 \times 5^n < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Cela prouve que (u_n) est décroissante.

3. $u_n = \frac{4}{n+1}$. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $f(x) = \frac{4}{x+1}$ de sorte que $u_n = f(n)$
 f est dérivable sur $[0; +\infty[$ car de la forme $4 \times \frac{1}{u}$ où $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$

$$\text{Pour tout } x \geq 0, f'(x) = 4 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) = -\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$(x+1)^2 > 0 \Rightarrow -\frac{4}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

Cela prouve que f est décroissante sur $[0; +\infty[$ et donc que (u_n) est décroissante

4. (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 + 5 \end{cases}$

Pour tout entier naturel n , on calcule : $u_{n+1} - u_n = n^2 + 5$

$$\left. \begin{array}{l} n^2 \geq 0 \\ 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0. \text{ Cela prouve que } (u_n) \text{ est croissante.}$$

5. (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

Par définition, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -2$, de sorte que, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Pour tout entier naturel n , on calcule : $u_{n+1} - u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$

Il est clair que : $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Cela prouve que (u_n) est croissante.